

## ΜΙΑ ΜΗ ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΥ ΕΠΗΡΕΑΖΟΥΝ ΤΗΝ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΪΡΕΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ BLACK-SCHOLES ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥΣ

### ΓΕΝΙΚΑ

© Η πρόσφατη εισαγωγή δικαιωμάτων προαίρεσης (options) Ευρωπαϊκού τύπου (όπου η εξάσκηση του δικαιώματος επιτρέπεται μόνο στην ημερομηνία λήξης [expiry date] του συμβολαίου), επί του δείκτη FTSE/ASE-20 αποτελεί ένα ακόμη βήμα προς την περαιτέρω ανάπτυξη του Χρηματιστηρίου Παραγώγων Αθηνών (Χ.Π.Α.). Δύο ειδών δικαιώματα προαίρεσης διαπραγματεύονται σήμερα στο Χ.Π.Α., δικαιώματα αγοράς (calls) και δικαιώματα πώλησης (puts) του συγκεκριμένου δείκτη σε μια προκαθορισμένη τιμή (strike price) στην ημερομηνία λήξης του συμβολαίου. Η αξία ενός συμβολαίου στην ημερομηνία λήξης του μπορεί να είναι μηδενική ή θετική. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η προκαθορισμένη τιμή του δείκτη σε ένα συμβόλαιο αγοράς και σε ένα συμβόλαιο πώλησης είναι 2000 μονάδες, και ότι τα συμβόλαια έχουν την ίδια ημερομηνία λήξης. Στην ημερομηνία λήξης των συμβολαίων ο δείκτης βρίσκεται στις 1900 μονάδες. Τότε η αξία του συμβολαίου αγοράς είναι μηδενική εφόσον είναι οικονομικά περισσότερο επωφελές ο αγοραστής του συμβολαίου αγοράς να αγοράσει το δείκτη στις 1.900 μονάδες και όχι στις 2.000 που ορίζει το συμβόλαιο αγοράς. Αντίθετα η αξία του συμβολαίου πώλησης είναι θετική επειδή είναι οικονομικά περισσότερο επωφελές ο αγοραστής του συμβολαίου πώλησης να πουλήσει το δείκτη στις 2.000 μονάδες που ορίζει το συμβόλαιο και όχι στις 1.900 μονάδες όπου ο δείκτης βρίσκεται στην ημερομηνία λήξης.

© Στην περίπτωση που η αξία του συμβολαίου είναι θετική τότε ο αγοραστής του συμβολαίου λαμβάνει ως κέρδος τη διαφορά μεταξύ του δείκτη και της προκαθορισμένης τιμής εξάσκησης πολλαπλασιαζόμενη επί ένα συντελεστή ο οποίος εκάστοτε καθορίζεται από τη διοίκηση του Χ.Π.Α.. Επειδή, σε αντίθεση με τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures), τα δικαιώματα προαίρεσης επιτρέπουν την πραγματοποίηση ενδεχομένων μεγάλων κερδών χωρίς τον κίνδυνο μεγάλων πιθανών ζημιών, ο αγοραστής ενός δικαιώματος πρέπει να «αποζημιώσει» τον πωλητή του δικαιώματος για αυτήν τη «διευκόλυνση» που του παρέχει.

© Αλλά ποιοι παράγοντες επηρεάζουν και πώς καθορίζεται η τιμή (premium) των δικαιωμάτων προαίρεσης; Τα ερωτήματα αυτά αποσκοπεί να απαντήσει η παρούσα ενότητα.

### Παράγοντες που Επηρεάζουν την Τιμή των Δικαιωμάτων Προαίρεσης

© Οι βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι:

**1) Η σχέση μεταξύ της τιμής του δείκτη και της προκαθορισμένης - στο συμβόλαιο - τιμής εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης.** Στην περίπτωση δικαιωμάτων αγοράς, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του δείκτη δε σχέση με την προκαθορισμένη στο συμβόλαιο τιμή τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία του συμβολαίου και βεβαίως συμφέρει η τελική εξάσκησή του. Το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση δικαιωμάτων πώλησης, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του δείκτη σε σχέση με την προκαθορισμένη στο συμβόλαιο τιμή τόσο μικρότερη είναι η αξία του συμβολαίου, όλων των άλλων παραγόντων σταθερών.

**2) Ο χρόνος που απομένει μέχρι την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου.** Σε γενικές γραμμές, όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια ενός συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του, καθώς η πιθανότητα στη λήξη του να έχει θετική αξία είναι μεγαλύτερη, όλων των άλλων παραγόντων σταθερών. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις το παραπάνω συμπέρασμα δεν ισχύει. Για παράδειγμα στην περίπτωση όπου διαπραγματεύονται δικαιώματα αγοράς με την ίδια προκαθορισμένη τιμή αλλά δύο διαφορετικές ημερομηνίες λήξης και αναμένεται η μερισματική απόδοση του δείκτη να είναι πολύ μεγάλη μεταξύ των δύο ημερομηνιών λήξης,

τότε επειδή η διανομή μερισμάτων οδηγεί σε πτώση του δείκτη η οποία επιδρά μόνο στην τιμή του μακροχρόνιου συμβολαίου (το βραχυχρόνιο συμβόλαιο παύει να διαπραγματεύεται μετά την πρώτη ημερομηνία λήξης) είναι πιθανόν η τιμή των βραχυχρόνιων συμβολαίων να είναι μεγαλύτερη της τιμής των μακροχρόνιων συμβολαίων.

**3) Η προσδοκώμενη μερισματική απόδοση του δείκτη κατά τη διάρκεια ισχύος του συμβολαίου.** Η διανομή μερισμάτων οδηγεί σε πτώση της τιμής του δείκτη τις ημέρες κατά τις οποίες διανέμονται μερίσματα, συνεπώς η αξία των δικαιωμάτων αγοράς μειώνεται. Το αντίθετο συμβαίνει με τα δικαιώματα πώλησης όπου η τιμή τους ωφελείται από την πτώση του δείκτη.

**4) Το επιτόκιο που ισχύει για επενδύσεις μηδενικού ρίσκου** (π.χ. επιτόκιο εντόκων γραμματίων). Η σχέση μεταξύ επιτοκίου για επενδύσεις μηδενικού ρίσκου και δικαιωμάτων προαίρεσης εξαρτάται από τη συσχέτιση (correlation) μεταξύ του επιτοκίου και της τιμής του δείκτη. Εάν η συσχέτιση είναι θετική (υψηλά επιτόκια σχετίζονται με αυξημένες τιμές) τότε μπορεί να δειχθεί ότι η τιμή των δικαιωμάτων πώλησης μειώνεται, ενώ το αντίθετο ισχύει για την τιμή των δικαιωμάτων αγοράς. Ενώ εάν η συσχέτιση είναι αρνητική (υψηλά επιτόκια σχετίζονται με μειωμένες τιμές δείκτη), τότε ότι η τιμή των δικαιωμάτων πώλησης αυξάνεται, ενώ η τιμή των δικαιωμάτων αγοράς μειώνεται.

**5) Η μεταβλητότητα (volatility) του δείκτη.** Η μεταβλητότητα, ή κατά την τεχνική ορολογία η τυπική απόκλιση της απόδοσης του δείκτη, αποτελεί ένα μέτρο των προσδοκώμενων τιμών στις οποίες μπορεί να φτάσει ο δείκτης μέσα σε κάποιο συγκεκριμένο διάστημα. Όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα τόσο μεγαλύτερες είναι οι πιθανότητες για μεγάλες ανόδους ή πτώσεις του δείκτη, και συνεπώς οι πιθανότητες για θετική αξία των δικαιωμάτων προαίρεσης κατά την ημερομηνία λήξης των συμβολαίων αυξάνονται. Συνεπώς η τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης ωφελείται από την αύξηση της μεταβλητότητας.

### Το Υπόδειγμα Black-Scholes

© Οι Fisher Black και Miron Scholes δημοσίευσαν το 1973 την πρώτη εργασία η οποία είχε ως σκοπό την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου στην περίπτωση μιας μετοχής με μηδενική μερισματική απόδοση (ο R. Merton επίσης, το ίδιο έτος, επέκτεινε το υπόδειγμα Black-Scholes στην περίπτωση μιας μετοχής με μη μηδενική μερισματική απόδοση). Η εν λόγω εργασία, βρήκε μεγάλη απήχηση σε ακαδημαϊκούς και επενδυτικούς κύκλους. Ενώ πριν τους Fisher Black και Miron Scholes πολλοί άλλοι ερευνητές δημοσίευσαν υποδείγματα για τον καθορισμό της τιμής των δικαιωμάτων προαίρεσης, το μειονέκτημα αυτών των μελετών ήταν η παρουσία στον τύπο για την τιμή του δικαιώματος παραμέτρων δύσκολων προς εκτίμηση, όπως ο παράγοντας αποστροφής κινδύνου λόγω πωλήσεως δικαιώματος ή η προσδοκώμενη απόδοση του δικαιώματος ή του δείκτη. Το υπόδειγμα Black-Scholes δεν έχει αυτά τα μειονεκτήματα, καθώς οι τύποι για την τιμή των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης εξαρτώνται μόνο από παράγοντες, οι οποίοι είτε καθορίζονται στο συμβόλαιο είτε μπορούν σχετικά εύκολα να εκτιμηθούν. Ο τύπος για τα δικαιώματα προαίρεσης δίνεται παρακάτω:

$$O = iSe^{-qT} N(d1) - iXe^{-rT} N(d2)$$

$$d1 = \frac{\ln(S/X) + (r - q + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

© Όπου O δηλώνει την τιμή του δικαιώματος, S την τιμή και q τη μερισματική απόδοση του δείκτη, r το επιτόκιο αποδόσεων μηδενικού κινδύνου, T το χρόνο σε έτη μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος και σ την ετήσια μεταβλητότητα του δείκτη. Τέλος η μεταβλητή i παίρνει την τιμή 1 εάν πρόκειται για δικαίωμα αγοράς και -1 εάν πρόκειται για δικαίωμα πώλησης ενώ N(.) συμβολίζει την τυποποιημένη κανονική κατανομή. **Ο τύπος για την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου μπορεί πολύ εύκολα να υπολογιστεί μιας και η τυποποιημένη κανονική κατανομή περιλαμβάνεται σε κάθε δημοφιλή πακέτο λογισμικού.**

© Αλλά πώς κατέληξαν οι Black-Scholes σε ένα τόσο απλό τύπο για την τιμή ενός δικαιώματος ο οποίος μάλιστα είναι και ανεξάρτητος από την προσδοκώμενη απόδοση του

δείκτη; Πριν παρουσιάσουμε τη λογική του υποδείγματος θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε τις πιο σημαντικές υποθέσεις οι οποίες πρέπει να ισχύουν για να είναι ο τύπος σωστός.

1) Η τιμή του δικαιώματος είναι συνάρτηση μόνο της διάρκειας του συμβολαίου και της τιμής της μετοχής καθώς το επιτόκιο αποδόσεων μηδενικού κινδύνου, η μερισματική απόδοση και η μεταβλητότητα του δείκτη θεωρούνται σταθερές.

2) Η μεταβολή του δείκτη από την μία τιμή στην άλλη μολονότι μπορεί να είναι γρήγορη (εξαρτάται από τη μεταβλητότητα) πρέπει να είναι συνεχής και να περνά από όλες τις ενδιάμεσες τιμές χωρίς “πηδήματα” (jumps) μεταξύ των τιμών.

3) Οι μελλοντικές αποδόσεις του δείκτη πρέπει να ακολουθούν την κανονική κατανομή.

4) Το κόστος διαπραγμάτευσης των δικαιωμάτων και του δείκτη θεωρείται μηδενικό. Παράλληλα η πώληση των μετοχών που απαρτίζουν το δείκτη από μη κατόχους επιτρέπεται.

5) Η αγορά είναι αποτελεσματική (efficient) με την έννοια ότι η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου μηδενικού κινδύνου ισούται με το επιτόκιο αποδόσεων μηδενικού κινδύνου.

Εάν οι παραπάνω υποθέσεις ισχύουν, τότε οι Black-Scholes απέδειξαν ότι ένα χαρτοφυλάκιο μηδενικού κινδύνου μπορεί να σχηματιστεί, για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, το οποίο περιλαμβάνει επιλεγμένες θέσεις σε δικαιώματα και στο δείκτη, και του οποίου η απόδοση ισούται (επειδή έχουμε μια αποτελεσματική αγορά) με το επιτόκιο αποδόσεων μηδενικού κινδύνου.

© Ο λόγος για τον οποίο ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο μπορεί να σχηματιστεί είναι η παρουσία μιας μόνο πηγής κινδύνου σε αυτό, της θέσης στο δείκτη, αφού αξία του δικαιώματος είναι συνάρτηση της τιμής του δείκτη. Κατά τη διάρκεια αυτού του πολύ μικρού διαστήματος η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς έχει μία 100% θετική συσχέτιση με τον δείκτη ενώ η τιμή ενός δικαιώματος πώλησης έχει μία 100% αρνητική συσχέτιση με αυτόν.

© Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις ένα χαρτοφυλάκιο μπορεί να σχηματιστεί έτσι ώστε τα κέρδη ή ζημιές από τη θέση στο δείκτη να αντισταθμίζουν τα κέρδη ή ζημιές από τη θέση στο δικαίωμα κατά 100% και η αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος του μικρού χρονικού διαστήματος να είναι γνωστή με ακρίβεια. Οι Black-Scholes έλυσαν τη διαφορική εξίσωση την οποία ακολουθεί το χαρτοφυλάκιο μηδενικού κινδύνου και την οποία περιγράψαμε με λόγια. Ο τύπος του δικαιώματος μπορεί να βρεθεί με τον παραπάνω τρόπο. Τέλος θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο για να παραμείνει μηδενικού κινδύνου καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος πρέπει συνεχώς να μεταβάλλονται οι θέσεις στο δικαίωμα ή στο δείκτη, βάσει ενός συγκεκριμένου τύπου.

---